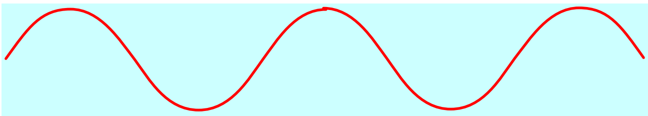
Γραφικές Παραστάσεις Τριγωνομετρικών Συναρτήσεων.

Κατά την μελέτη των Ταλαντώσεων, αλλά και των κυμάτων, συχνά απαιτείται να κάνουμε γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων, οι οποίες είναι αρμονικές. Άλλωστε αυτό που χαρακτηρίζει τις **αρμονικές** ταλαντώσεις ή το **αρμονικό** κύμα, είναι η αρμονικότητα.

Τι μορφή έχει λοιπόν μια τέτοια συνάρτηση, που στην περίπτωσή μας θα δίνει ένα μέγεθος σε συνάρτηση με το χρόνο;

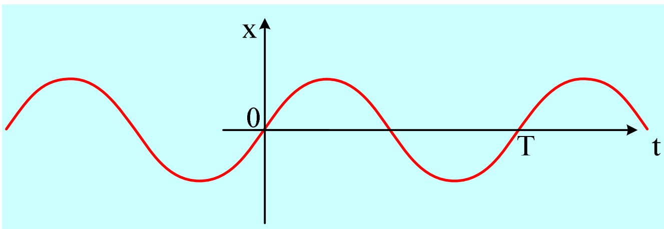
Η μορφή κάθε τέτοιας συνάρτησης είναι αυτή του παρακάτω σχήματος.



σχήμα (1)

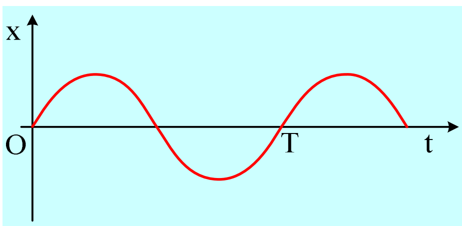
Από εκεί και πέρα, το πρόβλημα είναι πού θα τοποθετήσουμε την αρχή των αξόνων, ποια στιγμή θα πάρουμε δηλαδή σαν t=0, ή ποια θέση είναι αυτή για την οποία x=0;

1) Έστω η συνάρτηση x=Αημωt. Η κλασική ημιτονοειδής συνάρτηση. Προφανώς για t=0 θα έχουμε x=0, ενώ όταν αυξηθεί λίγο ο χρόνος (αμέσως μετά τη στιγμή μηδέν) το ημίτονο θα γίνει θετικό. Συνεπώς η γραφική παράσταση θα προκύψει από την παραπάνω εικόνα, αν τοποθετήσουμε τους άξονες, όπως στο παρακάτω σχήμα:



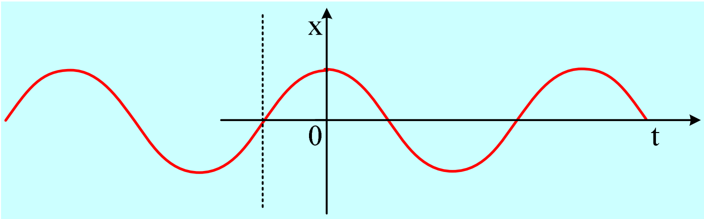
σχήμα (2)

και επειδή δεν συζητάμε για αρνητικούς χρόνους, τελικά η γραφική παράσταση της σχέσης: x=Αημωt, είναι αυτή του παρακάτω σχήματος:



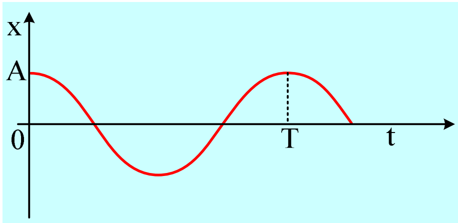
σχήμα (3)

2) Ας πάρουμε τώρα την συνάρτηση x=Α·συνωt. Συνημιτονοειδής συνάρτηση. Για t=0 x=+Α, άρα στο μέγιστο της καμπύλης. Ξεκινώντας λοιπόν από την αρχική εικόνα, θα σχεδιάσουμε τους άξονες, όπως στο σχήμα:



σχήμα (4)

και πάλι κόβουμε το αρνητικό κομμάτι των χρόνων και έχουμε:



σχήμα (5)

Ένα σχόλιο και ένα Συμπέρασμα.

Η συνάρτηση x=A·συνωt γράφεται και x=A·ημ(ωt+π/2). Αν παρατηρήσουμε τα σχήματα (2) και (4) θα δούμε ότι στην πραγματικότητα έχουμε μεταφέρει τον κατακόρυφο άξονα στο (4) προς τα δεξιά, μετατοπίζοντάς τον κατά γωνία π/2, που αντιστοιχεί σε χρόνο T/4. Αυτό είναι ένα γενικότερο συμπέρασμα το οποίο μπορούμε να εφαρμόζουμε:

«Αν η φάση είναι $\omega t+\varphi_0$, ο άξονας μετατοπίζεται προς τα δεξιά, ενώ αν $\varphi=\omega t-\varphi_0$ θα τον μετατοπίζουμε προς τα αριστερά.»

Εφαρμογή 1η:

Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

i) x=A·ημ(ωt+π/6)

ii) x= A·ημ(ωt+ 5π/6) και

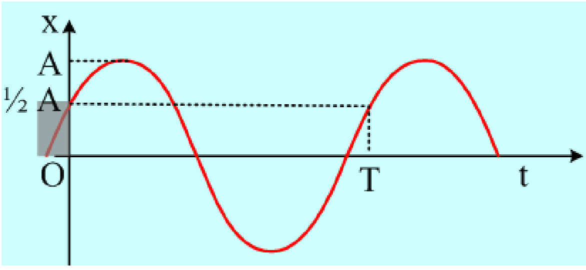
iii) x=A·ημ(ωt-2π/3)

Απάντηση:

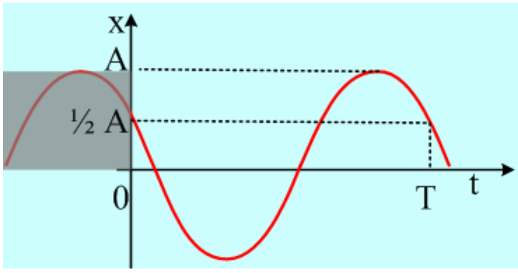
i) Η πρώτη σχέση προηγείται της x=Aημωt κατά π/6, συνεπώς θα μεταφέρουμε τον άξονα προς τα δεξιά, λιγότερο από την μεταφορά που κάναμε στο (4) σχήμα. Σε ποιο σημείο; Για t=0 έχουμε:

x= Aημπ/6= ½ A.

Άρα θα έχουμε το παρακάτω γράφημα (όπου με το γκρι χρώμα φαίνεται το μέρος της ημιτονοειδούς καμπύλης που αποκόπτεται):

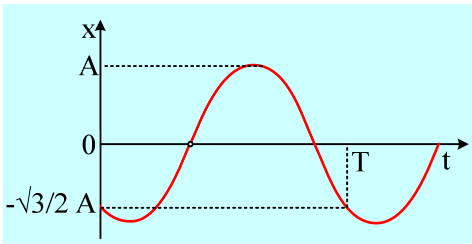


ii) Και εδώ θα μεταφέρουμε τον άξονα προς τα δεξιά, περισσότερο από Τ/4, αλλά και πάλι για t=0, x=A·ημ5π/6= ½ A.



iii) Τώρα θα μεταφέρουμε τον άξονα προς τα αριστερά, περισσότερο από Τ/4, ενώ για t=0 έχουμε:

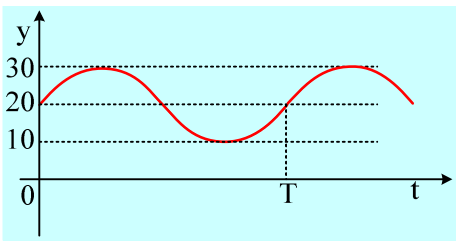
$$x=A\cdot ημ(-2π/3) = -\frac{\sqrt{3}}{2}A$$



3) Έστω τώρα ότι έχουμε την συνάρτηση:

y= 20+10·ημωt

Η συνάρτηση είναι ημιτονοειδής, συνεπώς θα έχει τη μορφή του σχήματος (1), αλλά σε κάθε τιμή θα προστίθεται η σταθερή τιμή 20. Άρα η καμπύλη θα είναι μετατοπισμένη προς τα πάνω κατά 20, με αποτέλεσμα να έχει τη μορφή του σχήματος:



Εφαρμογή 2η:

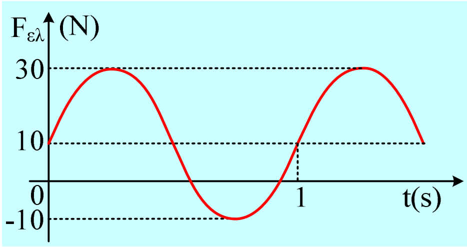
Ένα σώμα κρέμεται στο κάτω άκρο ελατηρίου. Να γίνει η γραφική παράσταση της δύναμης που ασκεί το ελατήριο πάνω του, για την οποία γνωρίζουμε ότι η τιμή της δίνεται από τη σχέση:

i) $F_{ελ}$= 10+20ημ(2πt) (μονάδες στο S.I.).

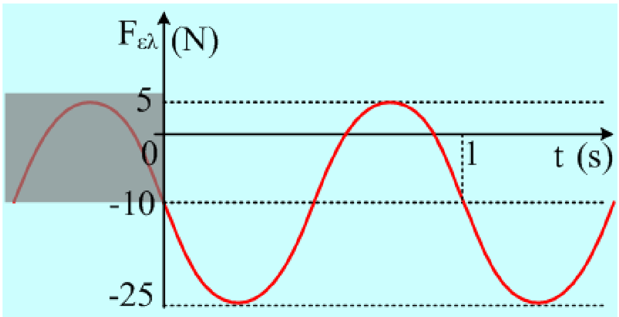
ii) $F_{ελ}$= -10 +15ημ(2πt+π) (μονάδες στο S.I.)

Απάντηση:

i) Η συνάρτηση είναι ημιτονοειδής, με περίοδο T=1s, μετατοπισμένη κατά 10 N προς τα πάνω, συνεπώς θα παίρνει τιμές από 10-20=-10N μέχρι 10+20=30N.



ii) Και εδώ η καμπύλη θα είναι κατακόρυφα μετατοπισμένη προς τα κάτω, γύρω από την τιμή -10, αλλά ταυτόχρονα παρουσιάζει και διαφορά φάσης π, σε σχέση με την ημιτονοειδή, πράγμα που σημαίνει ότι θα μεταφέρουμε κατά T/2 τον άξονα προς τα δεξιά.



4) Και μερικές ακόμη χρήσιμες περιπτώσεις:

α) Αν έχουμε δύο ταλαντώσεις όπου οι απομακρύνσεις έχουν εξισώσεις:

$$x_1= A\cdot ημ(ωt) \text{ και } x_2=A\cdot ημ(2ωt)$$

Η δεύτερη ταλάντωση έχει διπλάσια γωνιακή συχνότητα, άρα και συχνότητα από την πρώτη. Συνεπώς θα έχει την μισή περίοδο, ή με άλλα λόγια σε χρόνο όσο διαρκεί η περίοδος της πρώτης, η δεύτερη θα κάνει δύο εναλλαγές.

Παράδειγμα 1^{ο}:

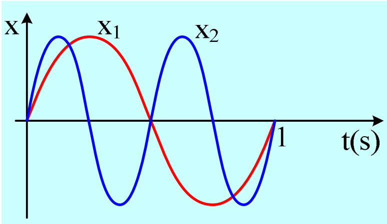
Οι απομακρύνσεις δύο υλικών σημείων που εκτελούν α.α.τ. δίνονται από τις εξισώσεις:

$$x_1= 2\cdot ημ2πt \text{ και } x_2= 2\cdot ημ4πt \text{ (μονάδες στο S.I.)}$$

Να παρασταθούν γραφικά οι παραπάνω απομακρύνσεις σε συνάρτηση με το χρόνο.

Απάντηση:

Η περίοδος της πρώτης είναι T_1=1s, ενώ της δεύτερης T_2=0,5s και οι γραφικές παραστάσεις είναι:

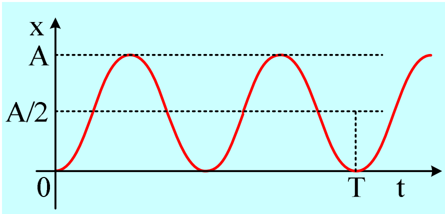


β) Και αν θέλουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $x= A\cdot ημ^2 ωt$;

Η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$x = A \cdot \frac{1-συν2ωt}{2} = \frac{A}{2} - \frac{A}{2} συν2ωt$$

Συνεπώς η συνάρτηση είναι συνημιτονοειδής μετατοπισμένη όμως προς τα πάνω κατά A/2 και ξεκινώντας για t=0 από την τιμή x=0. Έχουμε δηλαδή την παρακάτω καμπύλη.



Προσέξτε ότι σε χρόνο μιας περιόδου, έχουμε δύο εναλλαγές (αφού τελικά η γραφική παράσταση είναι του συν(2ωt).

Παράδειγμα 2ο:

Σε μια α.α.τ. η εξίσωση της δυναμικής ενέργειας δίνεται από τη σχέση $U=E\cdot συν^2 ωt$. Να γίνει η γραφική της παράσταση.

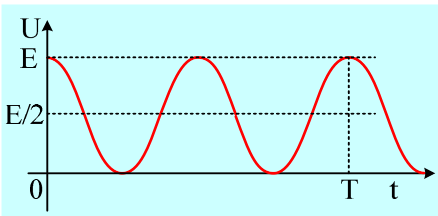
Απάντηση:

Με τη βοήθεια της τριγωνομετρίας παίρνουμε:

$$U = E \cdot συν^2 ωt = E \cdot \frac{1+συν2ωt}{2} \Rightarrow$$

$$U = \frac{E}{2} + \frac{E}{2} συν2ωt$$

Συνεπώς και πάλι έχουμε συνημιτονοειδή καμπύλη, διπλάσιας συχνότητας μετατοπισμένη προς τα πάνω κατά E/2, όπου για t=0, U=E.



dmargaris@sch.gr