Ελατήριο και… να δείξετε ότι το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.

Απαίτηση συνηθισμένη η παραπάνω, όχι στις ασκήσεις των πανελλαδικών εξετάσεων, αλλά σε εκείνες του σχολικού βιβλίου και του συνόλου των βοηθημάτων που κυκλοφορούν. Απαίτηση που πιστεύω πως όλοι μας απαντάμε στις τάξεις.

Η στρατηγική, όσο τουλάχιστον μπορώ να γνωρίζω, είναι σε αδρές γραμμές η εξής:

1. Σχεδιάζουμε το ελατήριο στο φυσικό του μήκος.
2. Σχεδιάζουμε το σώμα δεμένο στο ελατήριο στη θέση ισορροπίας του, σημειώνοντας τις δυνάμεις που ασκούνται πάνω στο σώμα και γράφοντας τη συνθήκη ισορροπίας, χρησιμοποιώντας <u>τα μέτρα</u> των δυνάμεων.
3. Σχεδιάζουμε το σώμα δεμένο στο ελατήριο σε μια τυχαία θέση της ταλάντωσής του, σημειώνουμε τις δυνάμεις που δέχεται και, χρησιμοποιώντας και πάλι <u>τα μέτρα</u> των δυνάμεων, δείχνουμε ότι ΣF=-kx. «Λεπτομέρεια»: Η «τυχαία θέση» επιλέγεται προς τη θετική κατεύθυνση, με βάση την οποία αφαιρέσαμε τα μέτρα των δυνάμεων στο προηγούμενο βήμα.

Η διαφωνία μου στον παραπάνω τρόπο εργασίας πηγάζει στην απορία που είχα από μαθητής: ***«Μα, τι είδους τυχαία θέση είναι αυτή που επιλέγεται πάντα προς τη θετική κατεύθυνση;»***. Ακόμα παραπέρα, ***«Είναι δυνατόν η απόδειξη ότι το σώμα εκτελεί ΑΑΤ να απαιτεί ορισμό της θετικής κατεύθυνσης; Για ποιον λόγο;»***. Τέλος, ***«Σε ένα φαινόμενο που κατ' εξοχήν προσφέρεται για χρήση αλγεβρικών τιμών και ως τέτοιο πλασάρεται από σχολικό βιβλίο και βοηθήματα, πώς μπορούμε να χρησιμοποιούμε τα μέτρα των μεγεθών για να καταλήγουμε σε μια σχέση αλγεβρική;»***.

Θα επιχειρήσω να δείξω ότι ***η προσεκτική χρήση αλγεβρικών τιμών κάνει την τυχαία θέση πράγματι τυχαία, αναιρεί την ανάγκη ορισμού θετικής κατεύθυνσης για τη συγκεκριμένη απόδειξη και τελικά είναι ευκολότερος τρόπος απόδειξης γιατί μπορεί να εφαρμοστεί πάντα με τον ίδιο ακριβώς τρόπο***.
Ας μην ξεχνάμε ότι οι μαθητές της Γ΄ Λυκείου αφιερώνουν μεγάλο χρονικό διάστημα στη Β΄ Λυκείου στη μελέτη των διανυσμάτων οπότε κάθε άλλο παρά ανυποψίαστοι είναι, ενώ μας παρέχεται η ευκαιρία να δείξουμε τη σύνδεση Μαθηματικών και Φυσικής.

Θα περιορίσω τη μελέτη μου σε ιδανικά ελατήρια των οποίων μάλιστα το ένα άκρο είναι στερεωμένο σε ακλόνητο τοίχωμα και σε περιπτώσεις στις οποίες το σώμα εκτελεί ΑΑΤ δηλαδή κάνει γραμμική κίνηση.

Ιδανικό ελατήριο με το ένα άκρο του ακλόνητα στερεωμένο.

Η λέξη ιδανικό προσδιορίζει τα εξής:

- Η μάζα του ελατηρίου είναι αμελητέα σε σχέση με τη μάζα του σώματος που είναι εξαρτημένο στο άκρο του.
- Το μέτρο της δύναμης την οποία το ελατήριο ασκεί στο σώμα που είναι δεμένο στο άκρο του είναι ανάλογο με το μέτρο της παραμόρφωσης του ελατηρίου, δηλαδή: $\left|\vec{F}_{ελ}\right| = k\left|\Delta\vec{l}\right|$ όπου k θετική σταθερά (η σταθερά του ελατηρίου) και Δl η παραμόρφωση του ελατηρίου.

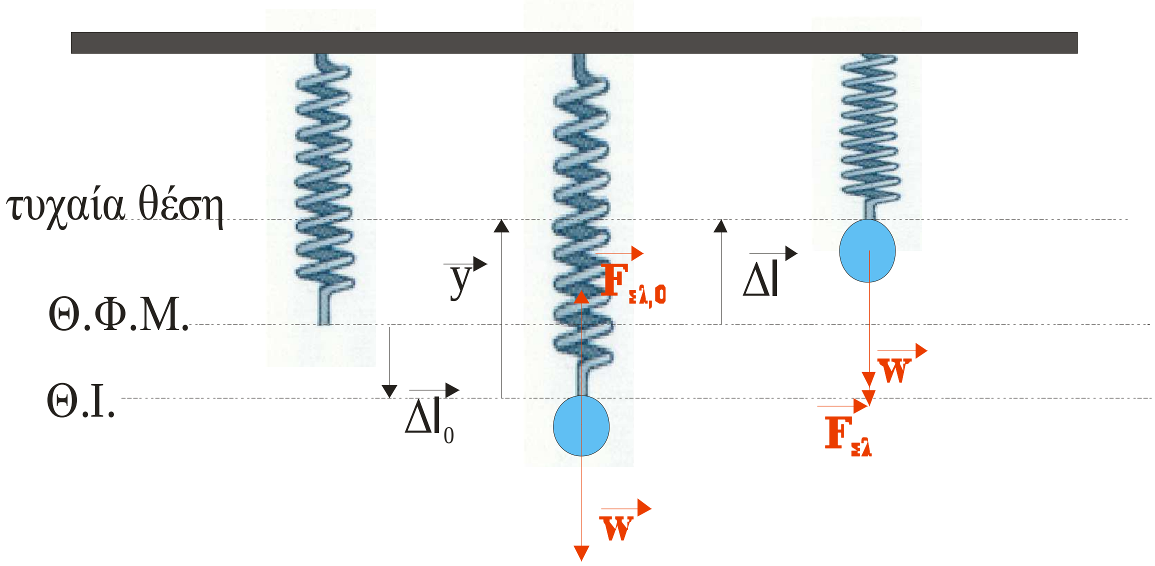
Τι είναι όμως η παραμόρφωση του ελατηρίου;

Είναι το διάνυσμα που έχει ***αρχή*** τη Θέση Φυσικού Μήκους (συντομογραφία ΘΦΜ) του ελατηρίου (δηλαδή τη θέση του ελεύθερου άκρου του ελατηρίου όταν πάνω του δεν ασκείται συνισταμένη δύναμη) και ***τέλος*** τη θέση του ελεύθερου άκρου του ελατηρίου. Είναι φανερό ότι το διάνυσμα αυτό έχει πάντα φορά από τη ΘΦΜ προς το ελεύθερο άκρο του ελατηρίου.
Από την άλλη μεριά, η δύναμη του ελατηρίου έχει πάντα κατεύθυνση προς τη ΘΦΜ οπότε θα είχαμε:

Διανυσματικά $\vec{F}_{\varepsilon\lambda} = -k\Delta\vec{l}$ και αλγεβρικά $F_{\varepsilon\lambda} = -k\Delta l$.

Μετά απ' αυτή τη μικρή παρένθεση περνάμε στην απόδειξη περί ΑΑΤ. Θα χρησιμοποιήσουμε ως μοντέλο το ***κατακόρυφο ιδανικό ελατήριο***.

Μοντέλο: Κατακόρυφο ιδανικό ελατήριο ακλόνητα στερεωμένο άκρο του και σώμα αμελητέων διαστάσεων εξαρτημένο στο άλλο άκρο του. Να δείξετε ότι το σώμα μπορεί (με κατάλληλη διατάραξη της ισορροπίας του) να εκτελέσει Απλή Αρμονική Ταλάντωση (συντομογραφία ΑΑΤ).
Θα εξετάσουμε ελατήριο ακλόνητα στερεωμένο στο πάνω άκρο του. Ακριβώς τα ίδια με όσα θα ισχυριστούμε πιο κάτω ισχύουν και για ελατήριο στερεωμένο στο κάτω άκρο του.



Σχεδιάζουμε, όπως φαίνεται και στα σχήματα:

- Το ελατήριο όταν έχει το φυσικό του μήκος και δείχνουμε τη ΘΦΜ.
- Το σώμα (με το ελατήριο) στη Θέση Ισορροπίας. Στο σχήμα αυτό δείχνουμε το διάνυσμα της παραμόρφωσης του ελατηρίου $\Delta\vec{l}_0$ (είναι διάνυσμα, όχι απόσταση) και τις δυνάμεις του βάρους και της δύναμης του ελατηρίου που δέχεται το σώμα.
- Το σώμα σε μια πραγματικά τυχαία θέση (συντομογραφία ΤΘ), όποια επιθυμούμε. Στο σχήμα αυτό δείχνουμε: Το διάνυσμα της (τυχαίας) παραμόρφωσης του ελατηρίου $\Delta\vec{l}$, το διάνυσμα της απομάκρυνσης $\vec{y}$ και τις δυνάμεις του βάρους και της δύναμης του ελατηρίου που δέχεται το σώμα.

Αξίζει να προσέξουμε τα εξής:

- Το $\Delta\vec{l}_0$ έχει αρχή τη ΘΦΜ και τέλος τη ΘΙ
- Το $\vec{y}$ έχει αρχή τη ΘΙ και τέλος την ΤΘ

- Το $\Delta\vec{l}$ έχει αρχή τη ΘΦΜ και τέλος την ΤΘ.

Δηλαδή, **ΠΑΝΤΑ**, τα διανύσματα $\Delta\vec{l}_0$ και $\vec{y}$ είναι διαδοχικά και το διάνυσμα $\Delta\vec{l}$ έχει αρχή την αρχή του πρώτου και τέλος το τέλος του δεύτερου, είναι δηλαδή το άθροισμά τους. Επομένως ισχύει:

$$\Delta\vec{l} = \Delta\vec{l}_0 + \vec{y} \qquad \text{και αλγεβρικά} \qquad \Delta l = \Delta l_0 + y$$

προφανώς ανεξάρτητα από την επιλογή της τυχαίας θέσης αλλά και της θετικής κατεύθυνσης, η οποία απλώς ορίζει τα πρόσημα στις αλγεβρικές τιμές των μεγεθών.

Δουλεύοντας πάντα με αλγεβρικές τιμές παρουσιάζουμε τη συνθήκη ισορροπίας:
$\Sigma F = 0 \Leftrightarrow w + F_{\varepsilon\lambda,0} = 0 \Leftrightarrow mg - k\Delta l_0 = 0 \quad (1)$
Και στη συνέχεια περνάμε στην τυχαία θέση:
$\Sigma F = w + F_{\varepsilon\lambda} \Leftrightarrow \Sigma F = mg - k\Delta l \Leftrightarrow \Sigma F = mg - k(\Delta l_0 + y) \Leftrightarrow \Sigma F = mg - k\Delta l_0 - ky \Leftrightarrow \Sigma F = -ky$

Όπου βέβαια χρησιμοποιήσαμε ότι $\Delta l = \Delta l_0 + y$ καθώς και τη σχέση (1).

Στην περίπτωση που η άσκηση συνεχίζεται και χρειάζονται αριθμητικοί υπολογισμοί επιλέγουμε θετική φορά και κάθε αλγεβρική τιμή έχει πια ένα πρόσημο. Το πιο «δύσκολο» σημείο ίσως είναι το γεγονός ότι η αλγεβρική τιμή της έντασης του πεδίου βαρύτητας είναι $g = -10 m/s^2$ αν επιλέξουμε θετική φορά προς τα πάνω. Νομίζω ωστόσο ότι αν είμαστε προσεκτικοί και επίμονοι, ξεπερνιέται εύκολα.

Μειονεκτήματα
Η μέθοδος ξενίζει τα παιδιά γιατί δεν έχουν συνηθίσει να εργάζονται με αλγεβρικές τιμές. Η απάντησή μου: Φταίμε εμείς και μόνο (μαζί με όλα τα βοηθήματα που κυκλοφορούν). Τα παιδιά μια χαρά μπορούν να καταλάβουν και θέλουν ένα στέρεο μαθηματικό και εννοιολογικό υπόβαθρο για να μην αισθάνονται ότι κάθε φορά πρέπει να βγάλουν διαφορετικό άσσο από το μανίκι τους. Άλλωστε πώς είναι δυνατόν στην Α΄ Λυκείου να επιμένουμε για χρήση αλγεβρικών τιμών σε εξισώσεις κίνησης και στη Γ΄ Λυκείου, σ' ένα φαινόμενο που επιβάλλεται να αντιμετωπίζεται με αλγεβρικές τιμές, να περνάμε στα μέτρα των μεγεθών;

Πλεονεκτήματα
- Η απόδειξη είναι σωστή (η τυχαία θέση είναι τυχαία θέση!) εφόσον χρησιμοποιούμε αλγεβρικές τιμές ενώ με τη χρήση μέτρων είναι – τουλάχιστον – ελλιπής.
- Η σχέση $\Delta l = \Delta l_0 + y$ επιτρέπει το πέρασμα από την παραμόρφωση του ελατηρίου στην απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας και αντιστρόφως με έναν σίγουρο τρόπο, χωρίς να είμαστε αναγκασμένοι να καταφεύγουμε στο σχήμα.
- Οι μαθητές νιώθουν (κάποιοι απ' αυτούς τουλάχιστον) τη σύνδεση Μαθηματικών και Φυσικής και αισθάνονται ότι οι μήνες που πέρασαν παρέα με τα διανύσματα στη Β΄ Λυκείου δεν ήταν άχρηστοι.

Σταύρος Ε. Πρωτογεράκης
Φυσικός