

## Εξίσωση κύματος.

Εξίσωση κύματος ονομάζουμε μια εξίσωση της μορφής  $y=f(x,t)$  που μας δίνει την απομάκρυνση από την θέση ισορροπίας ενός σημείου, σε συνάρτηση με την θέση του  $x$  και σε συνάρτηση με το χρόνο.

Όταν γράφουμε μια τέτοια εξίσωση, εννοούμε ότι έχουμε ένα κύμα που διαδίδεται κατά μήκος κάποιου άξονα  $x$ , πάνω στον οποίο έχουμε πάρει μια ορισμένη θέση, σαν την αρχή του άξονα ( $x=0$ ) όπως επίσης έχουμε θέσει κάποια χρονική στιγμή σαν  $t=0$ . Απλά πράγματα, που απλώς δεν πρέπει να ξεχνάμε όταν μελετάμε τα κύματα.

Η εξίσωση του σχολικού βιβλίου για την εξίσωση ενός αρμονικού κύματος:

$$y = A \cdot \eta\mu 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

ισχύει κάτω από τις εξής προϋποθέσεις:

Για  $t=0$ , το σημείο που βρίσκεται στην θέση  $x=0$ , περνά από την θέση ισορροπίας της ταλάντωσής του, κινούμενο προς την θετική κατεύθυνση. (Η ίδιες προϋποθέσεις ισχύουν για την εξίσωση του κύματος που διαδίδεται προς τα αριστερά και που απλώς αντί για το  $(-)$  έχουμε  $(+)$ ).

Αυτό **δεν** σημαίνει ότι:

- 1) Η πηγή του κύματος ΠΡΕΠΕΙ οπωσδήποτε να είναι στην θέση  $x=0$ .
- 2) Το κύμα πρέπει να ξεκινάει τη στιγμή  $t=0$ , από την θέση  $x=0$  υποχρεωτικά.

Σε πολλές ασκήσεις αναφέρονται πληροφορίες για την ταλάντωση της πηγής, την οποία θεωρούμε ότι είναι στη θέση  $x=0$ . Αν έχουμε τέτοιες πληροφορίες, κανένα πρόβλημα. Τα πράγματα είναι απλά, όπως στο παρακάτω παράδειγμα:

### Παράδειγμα 1<sup>ο</sup>:

Η πηγή ενός κύματος εκτελεί α.α.τ με πλάτος  $0,2\text{m}$  και συχνότητα  $0,5\text{Hz}$  βρίσκεται στην θέση  $x=0$  και ξεκινά την ταλάντωσή της από την θέση ισορροπίας, κινούμενη προς την θετική κατεύθυνση. Το κύμα που δημιουργεί διαδίδεται κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου με ταχύτητα  $4\text{m/s}$ , προς την θετική κατεύθυνση. Να βρεθεί η εξίσωση του κύματος.

### Απάντηση:

Από την θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής έχουμε:

$$v = \lambda \cdot f \rightarrow \lambda = v/f = 8\text{m}, \text{ ενώ } T = 1/f = 2\text{s}.$$

Εξάλλου όλα τα άλλα στοιχεία μας παραπέμπουν στην εξίσωση του βιβλίου μας.

Συνεπώς χωρίς άλλη συζήτηση γράφουμε:

$$y = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi \left( \frac{t}{2} - \frac{x}{8} \right) \quad (\text{S.I.})$$

Αν όμως η πηγή του κύματος δεν βρίσκεται στην θέση  $x=0$ , αλλά σε μια άλλη θέση; Ακολου-

θούμε με προσοχή την λογική του βιβλίου, όταν αποδεικνύει την εξίσωση του κύματος, με τις κατάλληλες προσαρμογές.

### Παράδειγμα 2<sup>ο</sup>:

Η πηγή ενός κύματος εκτελεί α.α.τ με πλάτος 0,2m και συχνότητα 0,5Hz βρίσκεται στην θέση  $x=2\text{m}$  και ξεκινά την ταλάντωσή της από την θέση ισορροπίας, κινούμενη προς την θετική κατεύθυνση. Το κύμα που δημιουργεί διαδίδεται κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου με ταχύτητα 4m/s, προς την θετική κατεύθυνση. Να βρεθεί η εξίσωση του κύματος.

### Απάντηση:

Και εδώ έχουμε  $T=2\text{s}$  και  $\lambda=8\text{m}$ . Αλλά:

Η εξίσωση ταλάντωσης της πηγής ικανοποιεί την εξίσωση:

$$y = A \cdot \eta\mu\omega t.$$

$$\begin{array}{ccccccc} & \text{O} & & \text{Π} & & \text{Σ} & \\ & \circ & & \circ & & \circ & \\ & 0 & & 2 & & x & \\ & & & & & & \text{x(m)} \end{array}$$

Έστω ένα τυχαίο σημείο Σ στη θέση x. Το κύμα για να φτάσει στο σημείο θα χρειαστεί χρόνο  $t_1=(x-2)/v$ . Συνεπώς η εξίσωση της ταλάντωσής του θα είναι:

$$y = A \cdot \eta\mu\omega(t - t_1) = A \cdot \eta\mu \frac{2\pi}{T} \left( t - \frac{x-2}{v} \right) \rightarrow$$

$$y = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi \left( \frac{t}{2} - \frac{x-2}{8} \right) = 0,2\eta\mu 2\pi \left( \frac{t}{2} - \frac{x}{8} + \frac{1}{4} \right)$$

Αυτή είναι και η εξίσωση του κύματος.

Αλλά αν η πηγή ήταν στην θέση  $x=0$ , αλλά ξεκινούσε την ταλάντωσή της έχοντας αρχική φάση:

Θα ακολουθούσαμε την ίδια λογική, όπως και πριν χωρίς βέβαια να ξεχνάμε αυτήν την αρχική φάση.

### Παράδειγμα 3<sup>ο</sup>:

Η πηγή ενός κύματος εκτελεί α.α.τ με πλάτος 0,2m και συχνότητα 0,5Hz βρίσκεται στην θέση  $x=0$  και ξεκινά την ταλάντωσή της από την θέση ισορροπίας, κινούμενη προς την αρνητική κατεύθυνση. Το κύμα που δημιουργεί διαδίδεται κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου με ταχύτητα 4m/s, προς την θετική κατεύθυνση. Να βρεθεί η εξίσωση του κύματος.

### Απάντηση:

Και εδώ έχουμε  $T=2\text{s}$  και  $\lambda=8\text{m}$ . Αλλά:

Η εξίσωση ταλάντωσης της πηγής ικανοποιεί την εξίσωση:

$$y = A \cdot \eta\mu(\omega t + \pi).$$

Έστω ένα τυχαίο σημείο Σ στη θέση x. Το κύμα για να φτάσει στο σημείο θα χρειαστεί χρόνο  $t_1=x/v$ . Συνεπώς η εξίσωση της ταλάντωσής του θα είναι:

$$y = A \cdot \eta\mu[\omega(t - t_1) + \pi] = A \cdot \eta\mu\left[\frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{v}\right) + \pi\right] \rightarrow$$

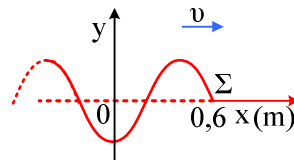
$$y = 0,2 \cdot \eta\mu\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \pi\right] = 0,2\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2} - \frac{x}{8} + \frac{1}{2}\right)$$

$$y = 0,2\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2} - \frac{x}{8} + \frac{1}{2}\right) \quad (\text{S.I.})$$

Όμως για να έχουμε την εξίσωση ενός κύματος δεν απαιτείται να έχουμε πληροφορίες για την πηγή του κύματος. Στην πραγματικότητα κάθε σημείο του μέσου λειτουργεί «σαν πηγή» για τα επόμενα σημεία. Έτσι μπορούμε να βρούμε την εξίσωση του κύματος από ένα στιγμιότυπο του κύματος που μας δίνεται κάποια χρονική στιγμή.

#### Παράδειγμα 4<sup>ο</sup>:

Κατά μήκος ενός ελαστικού μέσου και από αριστερά προς τα δεξιά διαδίδεται ένα αρμονικό κύμα συχνότητας 1Hz και πλάτους 0,2m και για  $t=0$  έχουμε την παρακάτω εικόνα του μέσου:



Να βρεθεί η εξίσωση του κύματος.

#### Απάντηση:

Το σημείο Σ, στο οποίο έχει φτάσει το κύμα για  $t=0$ , είναι «έτοιμο» να ξεκινήσει την ταλάντωσή του από τη θέση ισορροπίας, κινούμενο προς την θετική κατεύθυνση, άρα θα εκτελέσει ταλάντωση της μορφής:

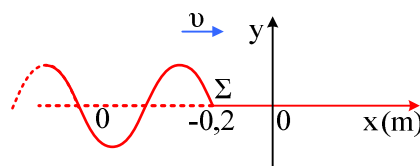
$$y = A \cdot \eta\mu\omega t.$$

Εξάλλου με βάση το σχήμα  $3\lambda/4 = 0,6\text{m} \rightarrow \lambda = 0,8\text{m}$ . Μπορούμε λοιπόν να χρησιμοποιήσουμε το σημείο αυτό «σαν πηγή» και ακολουθώντας την λογική του 2<sup>ου</sup> παραδείγματος να βρούμε:

$$y = 0,2\eta\mu 2\pi\left(t - \frac{x}{0,8} + \frac{3}{4}\right)$$

#### Παράδειγμα 5<sup>ο</sup>:

Κατά μήκος ενός ελαστικού μέσου και από αριστερά προς τα δεξιά διαδίδεται ένα αρμονικό κύμα με ταχύτητα  $v=0,4\text{m/s}$ , συχνότητας 1Hz και πλάτους 0,15m και για  $t=0$  έχουμε την παρακάτω εικόνα του μέσου:



Να βρεθεί η εξίσωση του κύματος.

#### Απάντηση:

Το σημείο Σ, στο οποίο έχει φτάσει το κύμα για  $t=0$ , είναι «έτοιμο» να ξεκινήσει την ταλάντωσή του από τη θέση ισορροπίας, κινούμενο προς την θετική κατεύθυνση, άρα θα εκτελέσει ταλάντωση της μορφής:

$$y = A \cdot \eta \mu \omega t.$$

Εξάλλου  $v = \lambda \cdot f \rightarrow \lambda = 0,4 \text{ m}$ . Μπορούμε λοιπόν να χρησιμοποιήσουμε το σημείο αυτό «σαν πηγή» και ακολουθώντας την λογική του 2<sup>ου</sup> παραδείγματος να βρούμε:

$$y = 0,15 \eta \mu 2\pi f \left( t - \frac{x - (-0,2)}{v} \right) \rightarrow$$

$$y = 0,15 \cdot \eta \mu 2\pi \left( t - \frac{x}{0,4} - \frac{1}{2} \right) \quad (\text{S.I.})$$

Να κλείσουμε για σήμερα το θέμα μας (το οποίο θα συνεχίσουμε με άλλες αναρτήσεις, δίνοντας κατάλληλες ασκήσεις-παραδείγματα) λέγοντας ότι όταν μελετάμε ένα κύμα, δεν είναι ανάγκη να μας δίνουν πού είναι η πηγή, αλλά ούτε πού έχει φτάσει κάποια στιγμή το κύμα. Μπορούμε να έχουμε ένα κύμα που διαδίδεται π.χ. προς τα δεξιά και έχει φτάσει σε μεγάλη απόσταση και εμείς μπορούμε να μελετήσουμε μια μικρή περιοχή, όπου θα πάρουμε κάποιο σημείο σαν  $x=0$  και κάποια στιγμή για  $t=0$  και με βάση κάποιες άλλες πληροφορίες, θα μπορούσαμε να γράψουμε την εξίσωση του κύματος. Έτσι η διατύπωση:

### **Παράδειγμα 6<sup>ο</sup>:**

Κατά μήκος του άξονα  $x$  και προς τα δεξιά διαδίδεται ένα κύμα, η εξίσωση του οποίου είναι:

$$y = 2 \cdot \eta \mu 2\pi \left( \frac{t}{2} - \frac{x}{4} \right) \quad (\text{S.I.})$$

Ποια είναι η ταχύτητα ταλάντωσης ενός σημείου Σ στη θέση  $x=4\text{m}$  τη στιγμή  $t=0$ .

### **Απάντηση:**

Η εκφώνηση δεν αναφέρει κάτι για την διάδοση του κύματος, οπότε προφανώς δεν θα ψάξουμε να βρούμε μέχρι πού έχει φτάσει, αλλά χωρίς περιορισμούς δεχόμαστε ότι όλα τα σημεία του μέσου ταλαντώνονται με την δοθείσα εξίσωση.

Άρα για το σημείο Σ θα έχουμε:

$$v = A \omega \cdot \sigma \upsilon \nu 2\pi \left( \frac{t}{2} - \frac{x}{4} \right)$$

και με αντικατάσταση  $v=2\pi \text{ m/s}$ .

