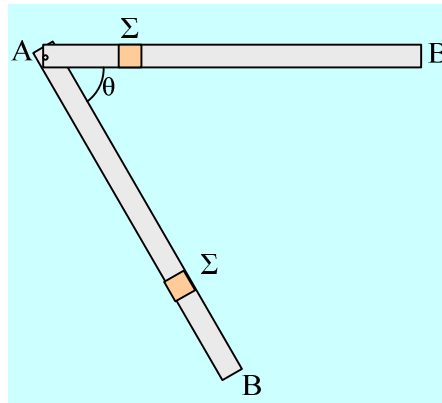


## Ρυθμός μεταβολής της στροφορμής συστήματος.

Ένας σωλήνας μήκους  $\ell=4\text{m}$  και μάζας  $3\text{kg}$  μπορεί να στρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το άκρο του A. Στο εσωτερικό του σωλήνα υπάρχει ένα μικρό σώμα  $\Sigma$  μάζας  $1\text{kg}$  που θεωρείται υλικό σημείο και το σύστημα ισορροπεί σε οριζόντια θέση.

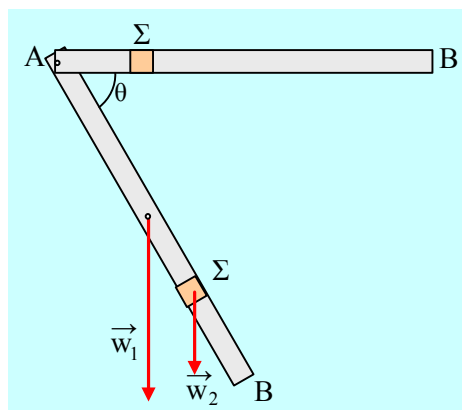


Σε μια στιγμή αφήνουμε το σωλήνα να κινηθεί. Τη στιγμή που ο σωλήνας σχηματίζει με την οριζόντια διεύθυνση γωνία  $\theta=60^\circ$ , το σώμα  $\Sigma$  έχει γλιστρήσει στο εσωτερικό του απέχοντας  $x=3\text{m}$  από το άκρο A. Τη στιγμή αυτή, ο σωλήνας έχει γωνιακή ταχύτητα  $\omega=2,4\text{rad/s}$ , ενώ το μέτρο της ταχύτητας του σημείου B μεταβάλλεται με ρυθμό  $6,4\text{m/s}^2$ . Για την παραπάνω χρονική στιγμή ζητούνται:

- Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του συστήματος ως προς τον άξονα περιστροφής του.
- Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του σωλήνα ως προς τον άξονα περιστροφής του.
- Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του σώματος  $\Sigma$  ως προς τον άξονα περιστροφής.
- Η ταχύτητα με την οποία γλιστρά η σφαίρα μέσα στο σωλήνα.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του σωλήνα ως προς τον άξονα περιστροφής του  $I=1/3m\ell^2$  και  $g=10\text{m/s}^2$ .

Απάντηση:



- i) Για το σύστημα σωλήνας-σώμα  $\Sigma$  έχουμε ως προς άξονα περιστροφής που περνά από το  $O$  (δουλεύουμε με αλγεβρικές τιμές):

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma \tau_{\varepsilon\xi}$$

Θεωρώντας θετική τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού έχουμε:

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma \tau_{\varepsilon\xi} = w_1 \cdot \frac{\ell}{2} \sigma \nu \theta + w_2 \cdot x \cdot \sigma \nu \theta$$

όπου  $w_1$  το βάρος του σωλήνα και  $w_2$  του σώματος  $\Sigma$ . Με αντικατάσταση παίρνουμε:

$$\frac{dL}{dt} = 45 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s}^2$$

Με κατεύθυνση κάθετη στο επίπεδο του σχήματος και φορά προς τα μέσα.

- ii) Για το σωλήνα έχουμε:

$$\frac{dL_1}{dt} = \frac{d(I\omega)}{dt} = I \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{3} m_1 \ell^2 \cdot a_{\gamma\omega\nu} \quad (1)$$

Αλλά ο ρυθμός μεταβολής του μέτρου της ταχύτητας του άκρου  $B$ , είναι η επιτόρξια επιτάχυνση του  $B$ , η οποία είναι ίση με:

$$a_{\varepsilon\pi B} = a_{\gamma\omega\nu} \cdot \ell \quad (2)$$

και η (1) γίνεται:

$$\frac{dL_1}{dt} = \frac{1}{3} m_1 \ell a_B$$

και με αντικατάσταση:

$$\frac{dL_1}{dt} = \frac{1}{3} m_1 \ell a_B = \frac{1}{3} 3 \cdot 4 \cdot 6,4 \text{ kgm}^2 / \text{s}^2 = 25,6 \text{ kgm}^2 / \text{s}^2$$

Με κατεύθυνση κάθετη επίσης στο επίπεδο του σχήματος και φορά προς τα μέσα.

- iii) Για τη στροφορμή του συστήματος έχουμε:

$$\vec{L}_{\text{ολ}} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$$

όπου όμως όλα τα διανύσματα έχουν την ίδια κατεύθυνση, οπότε:

$$L_{\text{ολ}} = L_1 + L_2 \rightarrow$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{dL_1}{dt} + \frac{dL_2}{dt}$$

$$\frac{dL_2}{dt} = \frac{dL}{dt} - \frac{dL_1}{dt} = 45 \text{ kgm}^2/\text{s}^2 - 25,6 \text{ kgm}^2/\text{s}^2 = 19,4 \text{ kgm}^2/\text{s}^2$$

- iv) Για το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής του σώματος  $\Sigma$ , ως προς τον άξονα που περνά από το  $O$ , έχουμε:

$$\frac{dL_2}{dt} = \frac{d(m_2 v_{\gamma\rho} r)}{dt} = m_2 \frac{d(\omega r^2)}{dt} = m_2 \frac{d\omega}{dt} \cdot r^2 + m_2 \omega \cdot 2r \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dL_2}{dt} = m_2 \frac{d\omega}{dt} r^2 + 2m_2 \omega r \cdot v_x \quad (3)$$

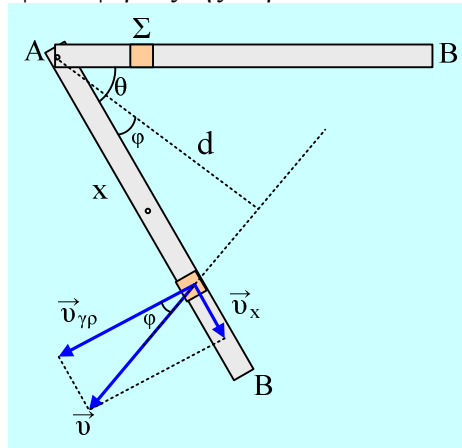
όπου  $v_x$  η ταχύτητα κατά μήκος του σωλήνα του σώματος  $\Sigma$  και  $r=x=3m$ , ενώ από την εξίσωση (2) βρίσκουμε:  $\alpha_{\gamma\omega\nu} = \alpha_B / \ell = 1,6 \text{ grad/s}^2$ .

Με αντικατάσταση στην (3) παίρνουμε:

$$v_x = 25/72 \text{ m/s} \approx 0,35 \text{ m/s}.$$

### Σχόλια:

- 1) Στο σχολικό βιβλίο αναφέρεται ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής ενός συστήματος και η σύνδεσή της με τις ροπές των εξωτερικών δυνάμεων. Η παραπάνω άσκηση είναι μια προσπάθεια διατύπωσης ενός θέματος που να φαίνεται η ανάγκη του νόμου αυτού.
- 2) Γράφουμε και μιλάμε συχνά για τη γενίκευση του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα σε αντιδιαστολή με το «θεμελιώδη νόμο». Δεν διαθέτουμε όμως και πολλά παραδείγματα που πρακτικά να φαίνεται η διαφορά αυτή. Εδώ έχουμε ένα σύστημα που επιταχύνεται και που η εφαρμογή του θεμελιώδους νόμου δεν είναι εφικτή.
- 3) Κάποιος θα έλεγε να βρίσκαμε τη ροπή αδράνειας του «στερεού» σωλήνας-σώμα  $\Sigma$ . Στην πραγματικότητα όμως δεν πρόκειται για ένα στερεό, αλλά για ένα σύστημα σωμάτων και αυτή τη λογική κρατήσαμε εδώ. Αν κάποιος θελήσει να πει ότι το σύστημα έχει ροπή αδράνειας  $I = 1/3 m_1 \ell^2 + m_2 \cdot x^2$  ως προς τον άξονα περιστροφής το αποτέλεσμα που θα καταλήξει θα είναι το ίδιο, αλλά το πρόβλημα μας πηγαίνει στην περσινή συζήτηση περί ισοδύναμης ροπής αδράνειας και δεν θα ήθελα να την ξανανοήσουμε...
- 4) Το σώμα  $\Sigma$  έχει στροφορμή ως προς το A μόνο εξαιτίας της γραμμικής του ταχύτητα  $\omega \cdot x$  και όχι εξαιτίας της  $v_x$ , αφού ο φορέας της περνά από το A. Δείτε το παρακάτω σχήμα:



Η στροφορμή του σώματος  $\Sigma$  ως προς το A είναι:

$$L_\Sigma = m v \cdot d = m v \cdot x \sin\phi = m (v \sin\phi) \cdot x = m \cdot v_{\gamma\rho} \cdot r = m \cdot x^2 \cdot \omega$$

[dmargaris@sch.gr](mailto:dmargaris@sch.gr)